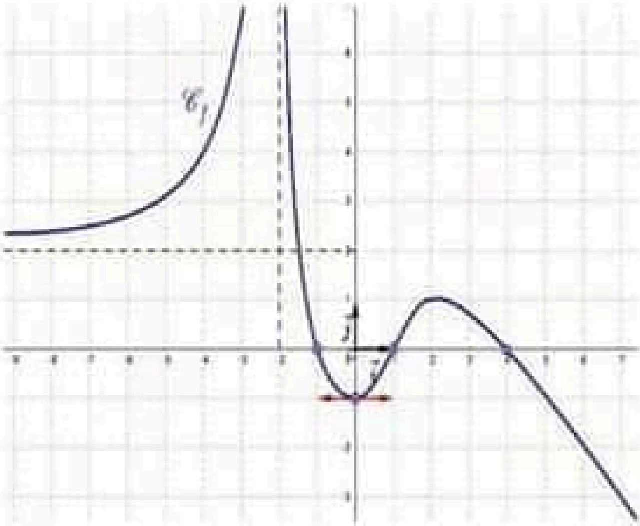
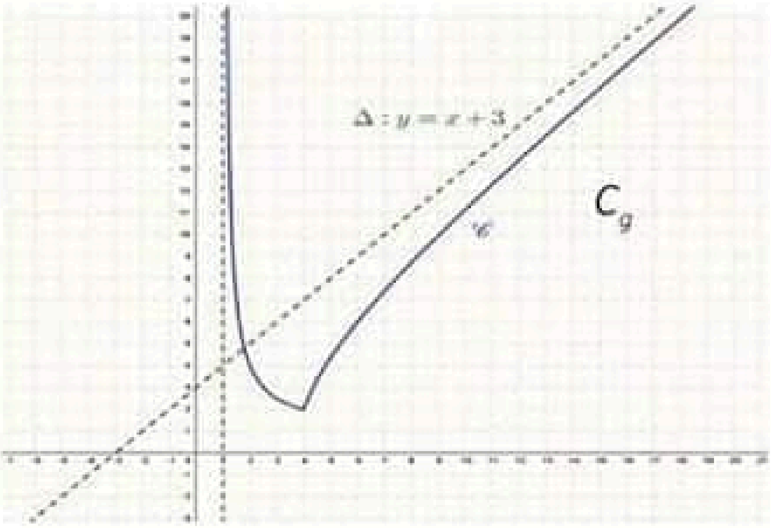
LYCEE PILOTE BAYREM 5
EL MENZAH 8

DEVOIR DE CONTROLE 1
26-10-2018 **4M**
MATHEMATIQUES 2H

EXERCICE 1 : 9 PTS

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Dans les figures ci-dessous on a représenté les courbes C_f et C_g respectivement des fonctions f et g. C_f admet une asymptote vecticale une asymptote horizontale et une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$. C_g admet deux asymptotes une verticale et une oblique au voisinage de $(+\infty)$.





1. Déterminer $f\left(\left]-2,1\right]\right)$ et $fog\left(\left]1,+\infty\right[\right)$.

2. Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)-3x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)-x^2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{gof^2(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\dfrac{\sin x}{2x}\right)$

3. a. Déterminer l'ensemble de définition de fof.

b. Montrer que la courbe de fof admet au moins admet une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note la fonction : $f_n = \underbrace{fofo........of}_{n\ fois}$.

a. Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x)$.

b. En déduire que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_{5+2k}(x) = -1$

5. a. déterminer l'ensemble de définition de $\dfrac{1}{f}$.

b. Dresser le tableau de variation de $\dfrac{1}{f}$.

tuniTests.tn
نجاحك يهمنا

c. $\frac{1}{f}$ est elle prolongeable par continuité en (-2) .

d. Déterminer $\frac{1}{f}\left(\left]-1,1\right[\right)$.

6. Soit g_1 la restriction de de g sur l'intervalle $\left[4,+\infty\right[$ et C_{g_1} sa courbe représentative dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ dans l'annexe , on a construit dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ la courbe de f et la courbe de g_1 et la droite $(y=x)$. On pose φ la fonction définie sur $\left[4,+\infty\right[$ par $\varphi = fog_1$

a. Montrer que φ est continue sur $\left[4,+\infty\right[$.

b. Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}$ et interpréter le résultat .

c. Calculer $\varphi(4)$.

d. Soient A et B les points de la courbe de φ d'abscisses respectives 5 et 7 .

Construire sur l'annexe (<u>Figure 1</u>) les points A et B .

e. Donner l'allure de la courbe de φ .

7. soit $n\in\mathbb{N}^*$

a. Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet dans $[1,2]$ une solution unique U_n .

b. Montrer que la suite (U_n) est décroissante .

c. Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite .

tuniTests.tn
نجاحك يهمنا

<u>Exercice 2</u> : 6 pts

Le plan est rapporté d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z non nul , associe le point M' d'affixe z' tel que : $z'=1-\frac{1}{z}$ soit A le point d'affixe 1.

1. **a.** Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires .

b. Montrer que pour tout point M distinct de A, on a : $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM'}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MA}}\right)\equiv 0\,[2\pi]$.

2. Dans l'annexe (<u>Figure 2</u>) , on a B le point tel que OAB est un triangle équilatéral direct et ζ le cercle circonscrit à ce triangle . E est le point du cercle ζ diamétralement opposé à B.

a. M étant placé , construire le point M' en justifiant .

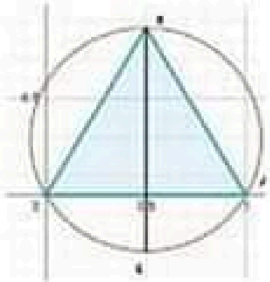
b. Pour $M'=B$ sans chercher l'affixe du point M , construire le point M en justifiant .

3. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation : $(E): 2z^2-2z-i\sin(2\theta)e^{i2\theta}=0$ avec $\theta\in\mathbb{R}$

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b. Pour $\theta\in\left]0,\pi\right[$, donner l'écriture exponentielle de chaque solution de (E).

4. Soit C le point d'affixe $-i\sin\theta.e^{i\theta}$ et $C'=f(C)$. Déterminer l'ensemble des points C' quand θ varie sur $\left]0,\frac{\pi}{4}\right]$.



5. Soit $\theta\in\left]0,2\pi\right[$.

a. Montrer que : $z'=e^{i\theta}$ si et seulement si $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\cot an(\frac{\theta}{2})$.

b. Déterminer les racines cubiques du nombre complexe : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

c. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z-1)^3=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z^3$

EXERCICE 3 : 5 PTS

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x=1+\frac{x^2-1}{2(x^2+1)}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x)=-2x^3+3x^2-2x+1$.

1.a. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans IR une unique solution $x_0=1$.

b. Vérifier que f est croissante sur $[0,1]$ et dresser son tableau de variation sur $[0,1]$.

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0=\frac{1}{2} \\ U_{n+1}=f(U_n)\ ;\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

2. a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{2}\leq U_n\leq 1$.

b. Montrer que la suite (U_n) est croissante .

c. Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite .

3 .a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1}-1|\leq\frac{4}{5}|U_n-1|$

b. On déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $|U_n-1|\leq\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ et retrouver la limite de (U_n).

4. Soit (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}(U_k-1)$. Montrer que (S_n) est décroissante et qu'elle est convergente vers un réel a .

5. On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_0=1$ et $V_{n+1}=V_n-\sqrt{V_n^2+U_n}$

a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $V_{n+1}-V_n\leq -U_n$.

b. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $V_n\leq -n+1-S_n$ et déterminer la limite de V_n.

tuniTests.tn
نجاحك يهمنا

ANNEXE

Nom & Prénom .... Classe ....

FIGURE 1

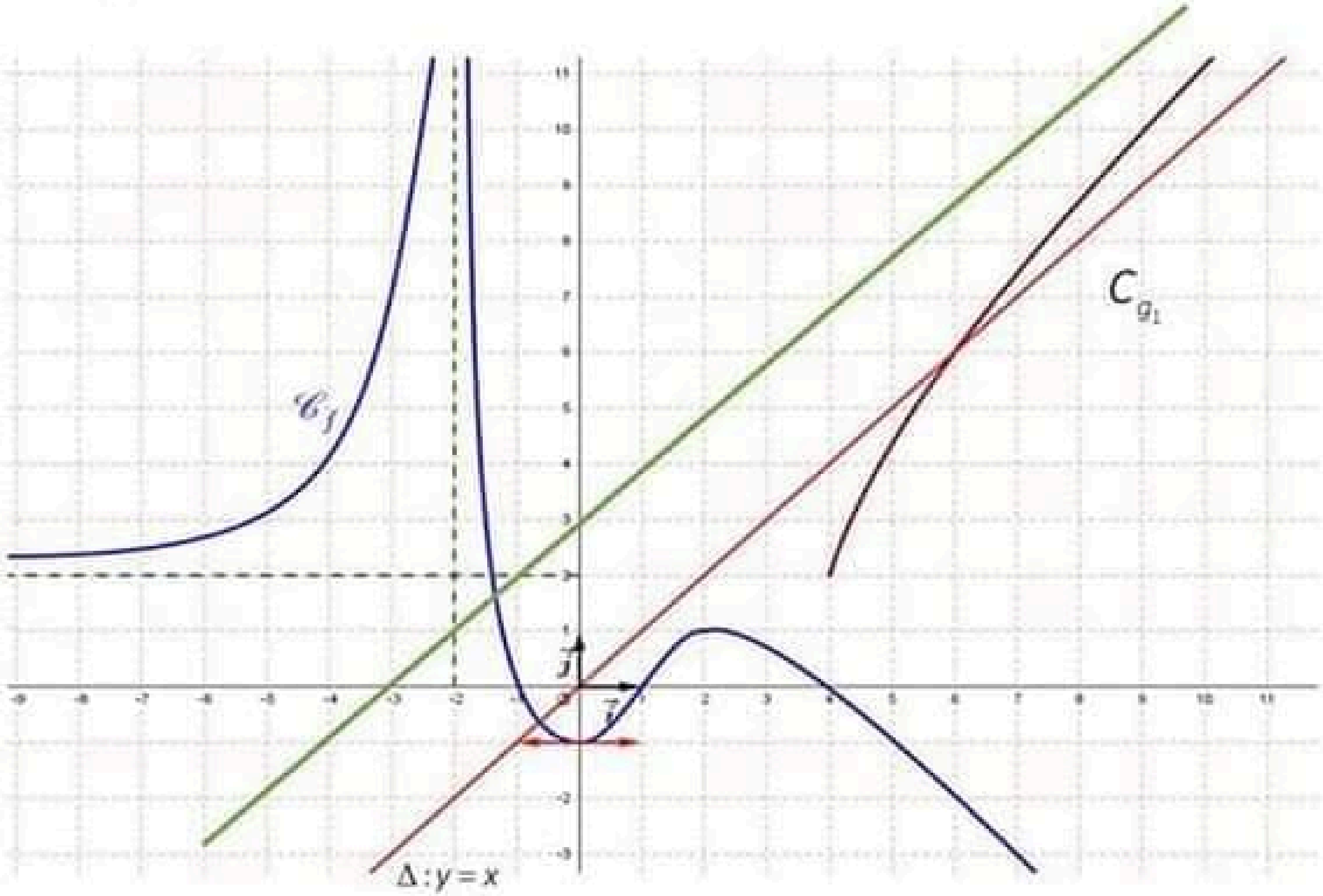
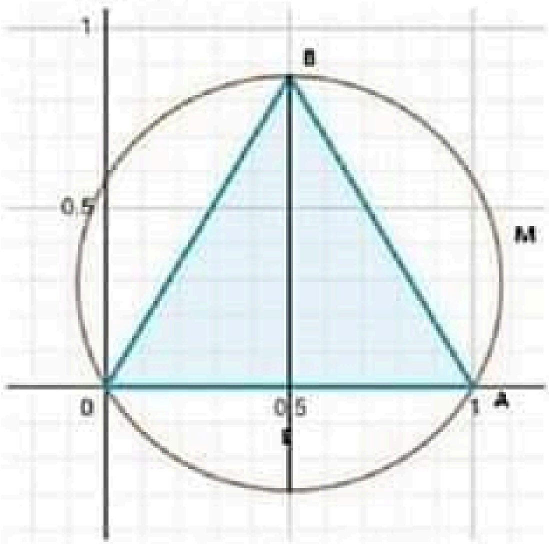


FIGURE 2



tuniTests.tn
نجاحك يهمنا